Algèbre linéaire

Applications en économie et en gestion

Jaouad Madkour
jmadkour@uae.ac.ma

Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales de Tanger
Département des sciences économiques et de gestion

Site Web : jmadkour.com
Facebook : www.facebook.com/jmadkour
YouTube : www.youtube.com/JaouadMadkour

25 janvier 2024

كلية العلوم القانونية والاقتصادية
والاجتماعية – طنجة
FSJES TANGER

Qu'est ce que l'algèbre linéaire ?

Définition

L'*algèbre linéaire* est la branche des mathématiques qui traite de la résolution des (systèmes d') équations linéaires $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$.

Origine du terme « algèbre » :

Le terme « algèbre » est apparu pour la première fois dans l'intitulé d'un ouvrage rédigé vers l'an 825 par le mathématicien persan Al-Khawarizmi (781 - 847) :

ABRÉGÉ DU CALCUL PAR LA RESTAURATION ET LA COMPARAISON

Le terme « algèbre » signifie : restauration, reconstruction ou réunion de parties.

Objectif pédagogique du cours

- Découvrir les notions de *matrice*, de *vecteur* et de *système d'équations*.
- Comprendre le calcul matriciel et ses propriétés.
- Résoudre des systèmes d'équations linéaires.
- Transformer un problème économique en un problème mathématique.
- Résoudre un problème économique algébriquement.

Références bibliographiques

- Gilles Charron et Pierre Parent, Algèbre linéaire et géométrie vectorielle, 5ème édition, 2018.
- Nicolas Bouffard, Géométrie vectorielle et algèbre linéaire, 2019.

Plan du cours

Chapitre 1 : Calcul matriciel
Chapitre 2 : Systèmes d'équations linéaires
Chapitre 3 : Espaces vectoriels

Chapitre 1 :

Calcul matriciel

- Définitions
- Matrices particulières
- Opérations sur les matrices
- Dépendance et indépendance linéaires
- Caractéristiques des matrices carrées

Définitions

Matrice

Définition

Une *matrice* de taille $n \times m$ est un tableau de nombres, appelés *éléments* ou *coefficients*, rangés en n lignes horizontales et m colonnes verticales :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Définitions

Matrice

Notation :

Une matrice est désignée par une lettre majuscule en précisant parfois sa taille $A_{n\times m}$. Ses coefficients sont notés par la lettre minuscule correspondante "a" affectée des indices de la ligne i et de la colonne j sur lesquelles ils se situent :

$$A_{n\times m} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}]_{n\times m}$$

Définitions

Matrice

Exemples

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Sous-matrice

Définition

Une *sous-matrice* $A^{'}$ de taille $n' \times m'$ d'une matrice $A_{n\times m}$ est une matrice obtenue en sélectionnant $n' \leq n$ lignes et $m' \leq m$ colonnes de la matrice A .

Exemples

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A^{'}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \\ A^{''}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Matrices particulières

Vecteur

Définition

Un *vecteur ligne* **x** de taille m est une matrice composée d'une seule ligne et de m colonnes, c'est à dire : $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_m]$.

Exemples

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = (\, 2 \,,\, 5 \,)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = (\, 1 \,,\, 5 \,,\, 2 \,)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = (\, 3 \,,\, 6 \,,\, 2 \,,\, 1 \,)$$

Matrices particulières

Vecteur

Définition

Un *vecteur colonne* **x** de taille n est une matrice composée d'une seule colonne et de n lignes, c'est à dire :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemples

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Vecteur

Remarques :

- Un vecteur est généralement noté en lettre minuscule en gras.
- Si la nature du vecteur n'est pas précisée, il s'agit d'un vecteur colonne.

Matrices particulières

Matrice rectangulaire

Définition

Une *matrice rectangulaire* de taille $n \times m$ est une matrice qui n'a pas le même nombre de lignes que de colonnes (i.e. $n \neq m$).

Exemples

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice carrée

Définition

Une *matrice carrée* d'ordre n, notée A_n, est une matrice qui a le même nombre n de lignes que de colonnes. Les coefficients qui se trouvent sur des lignes et des colonnes de mêmes indices forment la *diagonale principale* de la matrice carrée.

Exemples

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_5 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice diagonale

Définition

Une *matrice diagonale* est une matrice carrée d'ordre n, dont les coefficients hors diagonale sont tous nuls. Elle est notée $D_n = diag(\ d_{11}\ ,\ d_{22}\ , \cdots ,\ d_{nn}\ )$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv diag(\ 1\ ,\ 5\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$$

Matrices particulières

Matrice identité ou matrice unité

Définition

Une *matrice identité* d'ordre n (ou une *matrice unité*), notée I_n, est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, c'est à dire : $I_n = diag(\ 1\ ,1\ ,\cdots,\ 1\ )$.

Exemples

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice identité ou matrice unité

Remarque

Il ne faut pas confondre une matrice unité qui est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 avec une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exemples

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice scalaire

Définition

Une *matrice scalaire* A est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un scalaire α, c'est à dire : $A = diag(\ \alpha\ ,\ \alpha\ , \cdots ,\ \alpha\ )$.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice scalaire

Remarque

Dans le langage matriciel, afin de bien distinguer une matrice d'un nombre dans certaines opérations qui font intervenir les deux en même temps comme c'est le cas du produit d'une matrice A par un nombre α, ce dernier est appelé *scalaire*. Il ne faut donc pas confondre un scalaire qui est un nombre et une matrice scalaire qui est une matrice.

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Définition

Une *matrice triangulaire inférieure* est une matrice carrée dont les coefficients situés au dessus de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Définition

Une *matrice triangulaire strictement inférieure* est une matrice carrée dont les coefficients diagonaux et les coefficients situés au dessus de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Définition

Une *matrice triangulaire supérieure* est une matrice carrée dont les coefficients situés au dessous de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice triangulaire

Définition

Une *matrice triangulaire strictement supérieure* est une matrice carrée dont les coefficients diagonaux et les coefficients situés au dessous de sa diagonale principale sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice nulle

Définition

Une *matrice nulle* est une matrice de taille $n \times m$, notée $0_{n\times m}$, dont les coefficients sont tous nuls.

Exemples

$$0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice opposée

Définition

La *matrice opposée* (ou l'*opposée*) de la matrice $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ est une matrice de même taille, notée $-A$, dont les coefficients sont les opposés des coefficients de la matrice A, c'est à dire : $-A = [-a_{ij}]_{n\times m}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -6 & -5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Matrice transposée

Définition

La *matrice transposée* (ou la *transposée*) de la matrice $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ est une matrice de taille $m \times n$, notée $A^\top$, A' ou ${}^tA$, dont les lignes et les colonnes sont respectivement les colonnes et les lignes de la matrice A, c'est à dire : $A^\top = [a_{ji}]_{m\times n}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriété : Transposée d'une transposée

La transposée de la transposée d'une matrice A est égale à la matrice A : $(A^\top)^\top = A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^\top)^\top = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Matrices particulières

Matrice symétrique

Définition

Une *matrice symétrique* A est une matrice carrée dont les coefficients symétriques par rapport à sa diagonale principale sont identiques. Par conséquent, une matrice symétrique A est égale à sa transposée $A^\top$, c'est à dire : $A = A^\top$.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = A^\top \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} = B^\top$$

Matrices particulières

Matrice anti-symétrique

Définition

Une *matrice anti-symétrique* $A = [a_{ij}]$ est une matrice carrée dont les coefficients symétriques par rapport à sa diagonale principale sont des opposés. Par conséquent, une matrice anti-symétrique A est égale à l'opposée de sa transposée $-A^\top = [-a_{ji}]$, c'est à dire : $A = -A^\top$ ou encore $a_{ij} = -a_{ji}$. Cette dernière égalité implique que les coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} = -A^\top \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 5 & -6 \\ 5 & 4 & -5 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -B^\top$$

Opérations sur les matrices

Égalité des matrices

Définition

Deux matrices $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ et $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ sont *égales* si elles ont la même taille (i.e. $n = p$ et $m = q$) et si leurs coefficients correspondants sont identiques, c'est à dire : $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} A = B & B \neq C \\ A \neq C & B \neq D \\ A \neq D & C \neq D \end{array}$$

Opérations sur les matrices

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition

Le produit d'une matrice $A = [a_{ij}]$ par un scalaire α est une matrice αA (notée également $\alpha \cdot A$ ou $\alpha \times A$) obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par le même scalaire α, c'est à dire : $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2A = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 5 & 2\times 4 \\ 2\times 8 & 2\times 4 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 16 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Propriété 5 : Distributivité

Le produit d'une matrice par un scalaire est *distributif* par rapport à la somme des scalaires α et β : $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(3+2)A = \begin{bmatrix} (3+2)\times 2 & (3+2)\times 5 & (3+2)\times 4 \\ (3+2)\times 8 & (3+2)\times 4 & (3+2)\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 20 \\ 40 & 20 & 15 \end{bmatrix}$$

$$3A + 2A = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 5 & 3\times 4 \\ 3\times 8 & 3\times 4 & 3\times 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 5 & 2\times 4 \\ 2\times 8 & 2\times 4 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 & 20 \\ 40 & 20 & 15 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Addition des matrices

Propriété 3 : Élément neutre

La matrice nulle $0_{n\times m}$ est l'élément neutre de l'addition des matrices : $A_{n\times m} + 0_{n\times m} = A_{n\times m}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2+0 & 5+0 & 4+0 \\ 8+0 & 4+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Opérations sur les matrices

Addition des matrices

Propriété 4 : Distributivité

Le produit d'une matrice par un scalaire α est *distributif* par rapport à la somme des matrices A et B : $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2(A+B) = 2\begin{bmatrix} 1+1 & 7+0 & 4+3 \\ 3+6 & 5+7 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 14 \\ 18 & 24 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 8 \\ 6 & 10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 14 \\ 18 & 24 & 6 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Addition et soustraction des matrices

Remarque

L'addition et la soustraction des matrices ne peuvent se faire qu'entre des matrices de même taille. Pour ajouter (ou soustraire) un scalaire λ à (de) la diagonale principale d'une matrice carrée ou à (de) tous les coefficients d'une matrice quelconque, il convient de transformer le scalaire λ en une matrice de taille convenable par une opération de multiplication d'une matrice par un scalaire puis procéder au calcul de la somme (ou de la différence).

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 5-2 & 2 \\ 4 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - 2B = \begin{bmatrix} 5-2 & 2-2 \\ 4-2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit scalaire

Définition

Le *produit scalaire* de deux vecteurs de même taille $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est un scalaire, noté $\langle A, B \rangle$ ou $A.B$, donné par :

$$\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Si les vecteurs A et B sont identiques, $\langle A, B \rangle$ est appelé *carré scalaire*.

Exemple

$$A = (\ 2\ ,\ 5\ ,\ 3\ ) \qquad\qquad B = (\ 4\ ,\ 1\ ,\ 6\ )$$

$$\langle A, B \rangle = 2 \times 4 + 5 \times 1 + 3 \times 6 = 31$$

Opérations sur les matrices

Produit scalaire

Propriété 1 : Commutativité

Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est *commutatif*, c'est à dire : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

Exemple

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 32$$

Opérations sur les matrices

Produit scalaire

Propriété 2 : Distributivité

Le produit scalaire est *distributif* par rapport à l'addition, c'est à dire : $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$.

Exemple

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = (1+4)\times 7 + (2+5)\times 8 + (3+6)\times 9 = 172$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle = 1\times 7 + 2\times 8 + 3\times 9 = 50$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = 4\times 7 + 5\times 8 + 6\times 9 = 122$$

Opérations sur les matrices

Produit scalaire

Propriété 4 : Positivité du carré scalaire

Le carré scalaire d'un vecteur $\mathbf{x}$ est positif, c'est à dire : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.

Exemples

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \geq 0$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \geq 0$$

Opérations sur les matrices

Produit scalaire

Propriété 5 : Multiplication par un scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\alpha\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, où α est un scalaire, est égal au produit scalaire des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ multiplié par le scalaire α, c'est à dire : $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Exemple

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle 2\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (2 \times 1) \times 4 + (2 \times 2) \times 5 + (2 \times 3) \times 6 = 64$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 2(1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = 64$$

Opérations sur les matrices

Produit scalaire

Définition

Deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont *orthogonaux* (ou *perpendiculaires*) si leur produit scalaire est nul, c'est à dire : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Plus généralement, un ensemble de vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont *orthogonaux*, s'ils le sont deux à deux : $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$.

Exemple

$$\begin{array}{l|lll} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 0 \\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 0 = 0 \end{array}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Définition

Le *produit matriciel* de deux matrices $A = [a_{ij}]_{n\times p}$ et $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ est une matrice de taille $n \times q$, notée AB, $A{\cdot}B$ ou $A\times B$, dont les coefficients π_{ij} sont donnés par la produit scalaire de la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B : $\pi_{ij} = a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Dans la pratique :

$$\begin{array}{cccc} & & & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{kj} & b_{kq} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{pj} & b_{pq} \end{bmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & \pi_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \quad ?$$

$$\begin{array}{cccc} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 13 & 15 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Propriété 2 : Associativité

Le produit matriciel est *associatif* : $ABC = (AB)C = A(BC)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)C = \begin{bmatrix} 26 & 12 \\ 17 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 71 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 71 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Propriété 5 : Distributivité à droite

Le produit matriciel est *distributif à droite* par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 46 \\ 43 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB + AC = \begin{bmatrix} 26 & 12 \\ 17 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 & 34 \\ 26 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 46 \\ 43 & 28 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Propriété 6 : Distributivité à gauche

Le produit matriciel est *distributif à gauche* par rapport à l'addition : $(B+C)A = BA + CA$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (B+C)A = \begin{bmatrix} 4+1 & 1+2 \\ 3+6 & 2+3 \\ 1+1 & 0+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 37 & 18 \\ 23 & 65 & 32 \\ 9 & 30 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad BA + CA = \begin{bmatrix} 9+4 & 24+13 & 13+5 \\ 8+15 & 23+42 & 11+21 \\ 2+7 & 5+25 & 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 37 & 18 \\ 23 & 65 & 32 \\ 9 & 30 & 11 \end{bmatrix}$$

Propriété 7 : Transposée du produit des matrices

La transposée du produit des matrices A et B est égale au produit de leurs transposées $A^\top$ et $B^\top$ dans un ordre inversé : $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (AB)^\top = \begin{bmatrix} 47 & 55 \\ 41 & 47 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 47 & 41 \\ 55 & 47 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^\top A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 41 \\ 55 & 47 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Remarque 1 :

Si l'une des matrices A et B est nulle alors leur produit AB est par construction nul. Le contraire n'est pas nécessairement vrai : le produit AB peut être nul sans qu'aucune des matrices A et B ne le soit.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq 0_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

Remarque 2 :

L'égalité des produits matriciels AB et AC n'implique pas nécessairement l'égalité de B et C.

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \\ B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\ \\ C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow \quad AB = AC = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 20 & 12 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Définition

La *puissance* r d'une matrice carrée A d'ordre n, notée A^r, est le produit matriciel de cette matrice par elle-même r fois :

$$A^r = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r \text{ facteurs}}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
A^0 &= I_n \\
A^1 &= A \\
A^2 &= A \times A \\
A^3 &= A \times A \times A = A^2 \times A \\
&\vdots \\
A^r &= A^{r-1} \times A
\end{aligned}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 20 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 148 & 195 \\ 156 & 187 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 148 & 195 \\ 156 & 187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1076 & 1325 \\ 1060 & 1341 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est *idempotente* si $A^2 = A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est *nilpotente d'indice* $r \in \mathbb{N}$ si ses puissances s'annulent à partir d'une certaine valeur de r, c'est à dire :

$$A^{r-1} \neq 0_{n\times n} \text{ et } A^r = 0_{n\times n}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Rappel : Identités remarquables (pour les nombres réels)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}(a+b)^r &= C_r^0 a^r b^0 + C_r^1 a^{r-1} b^1 + \cdots + C_r^k a^{r-k} b^k + \cdots + C_r^r a^0 b^r \\ &= \sum_{k=0}^{r} C_r^k a^{r-k} b^k \quad \leftarrow \quad \text{Formule du binôme de Newton}\end{aligned}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Remarque :

Les valeurs du coefficient du binôme de Newton C_r^k sont lues dans le triangle de Pascal suivant pour différentes valeurs de r et de k :

C_r^k		k						
		0	1	2	3	4	$\cdots$	r
	0	1						
	1	1	1					
r	2	1	2	1				
	3	1	3	3	1			
	4	1	4	6	4	1		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Propriété 1 : Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices commutantes, c'est à dire $AB = BA$. La puissance r de la somme $A + B$ est donnée par la *formule du binôme de Newton* suivante :

$$(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k A^{r-k} B^k$$

Le *coefficient du binôme de Newton* C_r^k est lu dans le triangle de Pascal.

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Exemple

Soit les matrices A, B et I suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour calculer la puissance 3 de la matrice A, on peut d'abord l'écrire sous forme d'une somme des matrices commutantes B et I et appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^3 = (B+I)^3 = 1B^3I^0 + 3B^2I^1 + 3B^1I^2 + 1B^0I^3 = B^3 + 3B^2 + 3B + I$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Produit matriciel

Propriété 2 : Puissance d'une matrice diagonale

La puissance r d'une matrice diagonale $D = diag(\ d_1\ ,\ d_2\ ,\cdots,\ d_n\ )$ est une matrice diagonale D^r formée uniquement des puissances r des coefficients diagonaux, c'est à dire : $D^r = diag(\ d_1^r\ ,\ d_2^r\ ,\cdots,\ d_n^r\ )$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Dépendance et indépendance linéaires

Combinaison linéaire - Combinaison convexe

Définition

Une *combinaison linéaire* de deux vecteurs **x** et **y** est un vecteur **z** défini par $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ où α et β sont deux scalaires. Si, de plus, $\alpha + \beta = 1$ alors **z** est une *combinaison convexe* de **x** et **y**.

Exemple

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \; 2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 4 \\ 2 \times 3 + 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Dépendance et indépendance linéaires

Dépendance linéaire

Définition

Les vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont *linéairement dépendants* s'il existe un scalaire non nul α_1 tel que $\mathbf{x}_2 = \alpha_1\mathbf{x}_1$. Plus généralement, un ensemble de vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont *linéairement dépendants* si le vecteur $\mathbf{x}_k$, par exemple, est une combinaison linéaire des autres vecteurs, c'est à dire, s'il existe un ensemble de scalaires non tous nuls α_1, α_2,... et α_{k-1} tels que : $\mathbf{x}_k = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}$ ou encore $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Théorème

Les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont *linéairement dépendants* s'il existe des scalaires non tous nuls α_1, α_2,... et α_k tels que : $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$

Dépendance et indépendance linéaires

Dépendance linéaire

Exemple

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = 2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + (-1) \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2-2 \\ -2+3-1 \\ 4-2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dépendance et indépendance linéaires

Indépendance linéaire

Définition

Les vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont *linéairement indépendants* s'il n'existe aucun scalaire non nul α_1 tel que $\mathbf{x}_2 = \alpha_1\mathbf{x}_1$. Plus généralement, un ensemble de vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont *linéairement indépendants* s'il est impossible de trouver un ensemble de scalaires non tous nuls α_1, α_2,... et α_k qui vérifient l'égalité suivante : $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Théorème

Les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont *linéairement indépendants* si l'égalité $\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Dépendance et indépendance linéaires

Indépendance linéaire

Exemple

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Dépendance et indépendance linéaires

Orthogonalité et indépendance linéaire

Théorème

Des vecteurs orthogonaux $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont linéairement indépendants, c'est à dire l'égalité $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Démonstration

Soit $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ des vecteurs orthogonaux non nuls. Pour qu'ils soient linéairement indépendants, il faut que l'égalité $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Calculons le produit scalaire des membres de notre égalité par le vecteur $\mathbf{x}_1$:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1\rangle &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_1\rangle \\
\langle \alpha_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle + \langle \alpha_2\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle + \cdots + \langle \alpha_k\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1\rangle &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_1\rangle \\
\alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle + \cdots + \alpha_k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1\rangle &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_1\rangle
\end{aligned}$$

Comme les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... et $\mathbf{x}_k$ sont orthogonaux, alors $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$ et $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle \neq 0$ pour $i = j$, il en résulte : $\alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle = 0$ d'où $\alpha_1 = 0$. De la même manière, le calcul du produit scalaire des membres de l'égalité par les vecteurs $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$,... et $\mathbf{x}_k$ respectivement aboutit à $\alpha_2 = 0$,... et $\alpha_k = 0$.

Dépendance et indépendance linéaires

Orthogonalité et indépendance linéaire

Exemple

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} & \Rightarrow \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 0 \\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow \quad \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 0 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs **x**, **y** et **z** sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y} + \alpha_3 \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_2 & -2\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & -\alpha_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Les vecteurs **x**, **y** et **z** sont linéairement indépendants.

Caractéristiques des matrices carrées

Trace

Définition

La *trace* d'une matrice carrée A d'ordre n, notée $tr(A)$, est égale à la somme de ses coefficients diagonaux, c'est à dire : $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad tr(A) = 2 + 3 + 1 = 6$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Définition

Le *déterminant* d'une matrice carré A est un scalaire, noté $det(A)$ ou $|A|$, qui caractérise la matrice A et qui intervient, entre autres, dans le calcul de sa matrice inverse, de ses valeurs propres, du rang d'une matrice et aussi dans la résolution des systèmes d'équations linéaires.

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Définition

Le *déterminant* d'une matrice carrée A_n est un scalaire obtenu comme suit :

1. Sélectionner une ligne i ou une colonne j de la matrice A_n ;
2. Calculer les cofacteurs c_{ij} associés aux coefficients a_{ij} sélectionnés ;
3. Multiplier chaque coefficient sélectionné a_{ij} par son cofacteur c_{ij} ;
4. Additionner les produits des coefficients a_{ij} par leurs cofacteurs c_{ij}.

Le résultat final est le déterminant de la matrice A_n formalisé comme suit :

$$\text{Selon la ligne } i : det(A_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

$$\text{Selon la colonne } j : det(A_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

Exemple

Développement selon la ligne 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (4-2) - 2(3-4) = 4$$

Développement selon la colonne 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2-8) + (4-6) = 4$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 1 : Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1

Le déterminant d'une matrice carrée $A = [a_{11}]$ d'ordre 1, ne contenant qu'un seul coefficient a_{11}, est égal au scalaire a_{11}, c'est à dire : $det(A) = a_{11}$.

Exemple

$$A = [5] \quad \Rightarrow \quad det(A) = 5$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 2 : Déterminant d'une matrice carrée nulle

Le déterminant d'une matrice nulle 0_n est égal à 0, c'est à dire : $det(0_n) = 0$.

Exemple

$$0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(0_2) = 0$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 4 : Lignes ou colonnes d'une matrice carrée identiques

Si deux lignes ou deux colonnes d'une matrice carrée A sont identiques, le déterminant $det(A)$ de la matrice A est nul.

Exemple

$$A_l = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A_l) = (4 \times 3) - (4 \times 3) = 0$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A_c) = (2 \times 3) - (3 \times 2) = 0$$

Propriété 6 : Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire

Si tous les coefficients d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice carrée A sont multipliés par un scalaire α, le déterminant de la matrice A sera multiplié par le scalaire α.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 3) - (4 \times 2) = -5$$

$$A_l = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 2 \times 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A_l) = (2 \times 3) - (4 \times 4) = -10 = 2 \times det(A)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 2 \\ 4 \times 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A_c) = (2 \times 3) - (8 \times 2) = -10 = 2 \times det(A)$$

Propriété 7 : Multiplication d'une matrice carrée par un scalaire

Le déterminant du produit d'une matrice carrée A_n par un scalaire α est égal au déterminant de la matrice A_n multiplié par la puissance n du scalaire α, c'est à dire : $det(\alpha A_n) = \alpha^n det(A)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 3) - (4 \times 2) = -5$$

$$2A = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 2 \times 2 \\ 4 \times 2 & 3 \times 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(2A) = (2 \times 6) - (8 \times 4) = -20 = 2^2 \times det(A)$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 8 : Ajouter à une ligne (ou une colonne) le multiple d'une autre

Si l'on ajoute à une ligne (respectivement, une colonne) d'une matrice carrée A le produit d'une autre ligne (respectivement, colonne) par un scalaire α, le déterminant demeure inchangé.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 3) - (4 \times 2) = -5$$

$$A_l = \begin{bmatrix} 1 + (2 \times 4) & 2 + (2 \times 3) \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A_l) = (9 \times 3) - (4 \times 8) = -5$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 + (2 \times 2) & 2 \\ 4 + (2 \times 3) & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A_c) = (5 \times 3) - (10 \times 2) = -5$$

Propriété 9 : Déterminant d'une matrice transposée

Le déterminant de la transposée $A^\top$ d'une matrice carrée A est égal au déterminant de la matrice A, c'est à dire : $det(A^\top) = det(A)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 3) - (4 \times 2) = -5$$

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A^\top) = (1 \times 3) - (2 \times 4) = -5$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 10 : Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 3) - (0 \times 2) = 1 \times 3 = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(B) = (4 \times 6) - (5 \times 0) = 4 \times 6 = 24$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 11 : Déterminant d'une matrice diagonale

Le déterminant d'une matrice diagonale $D = diag(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$ est égal au produit de ses coefficients diagonaux, c'est à dire : $det(D) = d_{11} \times d_{22} \times \cdots \times d_{nn}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 3) - (0 \times 0) = 1 \times 3 = 3$$

Caractéristiques des matrices carrées

Déterminant

Propriété 12 : Déterminant d'un produit matriciel

Le déterminant du produit matriciel de deux matrices carrées A et B de même ordre n est égal au produit du déterminant de la matrice A par le déterminant de la matrice B, c'est à dire : $det(AB) = det(A) \times det(B)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = (1 \times 1) - (3 \times 2) = -5$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(B) = (1 \times 2) - (2 \times 2) = -2$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(AB) = (5 \times 8) - (5 \times 6) = 10$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Définition

Une matrice carrée A est *inversible* s'il existe une matrice carrée B de même ordre, dite *matrice inverse* de la matrice A et notée A^{-1}, telle que :

$$AB = BA = I \tag{1}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Théorème

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre telles que $AB = I$, alors $BA = I$.

Conséquence du théorème

Afin de vérifier qu'une matrice carrée B est l'inverse d'une matrice carrée A de même ordre, il suffit de vérifier que $AB = I$ car la deuxième partie $BA = I$ sera automatiquement vérifiée.

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Définition

La *matrice des cofacteurs* (ou la *comatrice*) associée à une matrice carrée A d'ordre n est une matrice carrée de même ordre n, notée A^c, obtenue en remplaçant chaque coefficient a_{ij} de la matrice A par le cofacteur correspondant c_{ij}.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^c = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Définition

La *matrice adjointe* associée à une matrice carrée A, notée A^a, est la transposée de sa matrice des cofacteurs A^c, c'est à dire : $A^a = (A^c)^\top$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^c = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^a = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Théorème

Soit A une matrice carrée et A^a sa matrice adjointe. On a : $AA^a = A^aA = det(A)I$

Conséquences du théorème

- Si $det(A) \neq 0$, on divise la relation précédente par $det(A)$ et on obtient :

$$A\left(\frac{A^a}{det(A)}\right) = \left(\frac{A^a}{det(A)}\right)A = I \tag{2}$$

  On reconnaît ici la définition (1) d'une matrice inverse. On conclut que la matrice A est inversible et sa matrice inverse A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}A^a \tag{3}$$

- Si $det(A) = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible et sa matrice inverse n'est pas définie.

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Définitions

Une matrice carrée A est dite *inversible* ou *régulière* si son déterminant $det(A)$ est non nul. Dans le cas contraire, la matrice A n'est pas inversible, elle est dite *singulière*.

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(A) = 7 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad det(B) = 0 \quad \rightarrow \quad B \text{ est singulière}$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Remarque :

Le calcul de la matrice inverse selon la formule (3) n'est approprié que pour des matrices carrées de petite taille. Cependant, à partir d'un certain ordre, les calculs deviennent fastidieux est rendent en conséquence cette méthode inefficace. L'élimination de Gauss, qui sera présentée dans le chapitre 2, est une approche alternative qui peut s'appliquer quelle que soit la taille des matrices à inverser.

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Propriété 1 : Inverse d'une matrice scalaire

L'inverse d'une matrice scalaire non nulle $A = diag(\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$ est la matrice scalaire $A^{-1} = diag(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \cdots, \frac{1}{\alpha})$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Propriété 2 : Inverse de l'inverse d'une matrice carrée

L'inverse de l'inverse d'une matrice carrée A est simplement la matrice A : $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Caractéristiques des matrices carrées

Matrice inverse

Propriété 5 : Inverse d'une matrice diagonale

L'inverse d'une matrice diagonale $D = diag(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$ contenant uniquement des coefficients non nuls est une matrice diagonale formée des inverses des coefficients diagonaux de la matrice D, c'est à dire : $D^{-1} = diag(\frac{1}{d_{11}}, \frac{1}{d_{22}}, \cdots, \frac{1}{d_{nn}})$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Définition

Un vecteur <u>non nul</u> $\mathbf{v}$ est un *vecteur propre* (ou un *vecteur caractéristique*) d'une matrice carrée A s'il existe un scalaire λ tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Le scalaire λ est alors une *valeur propre* (ou une *valeur caractéristique*) de la matrice A.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_1 \qquad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_2 \qquad A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\mathbf{v}_3$$

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Définition

L'*équation caractéristique* d'une matrice carrée A_n s'écrit : $det(A_n - \lambda I_n) = 0$ où λ est une valeur propre de la matrice A_n. La résolution de cette équation caractéristique détermine les valeurs propres λ_1, λ_2... et λ_n de la matrice A_n.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Remarques

- Une matrice carrée d'ordre n dispose de n valeurs propres λ_1, λ_2,... et λ_n dont certaines sont identiques. Si, par exemple, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$ (avec $k \leq n$) alors la valeur propre λ est dite de *multiplicité* k.
- La détermination des valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre n nécessite la résolution d'une équation caractéristique de degré n. Par conséquent, à partir d'un certain ordre n de la matrice, le résolution manuelle de l'équation caractéristique n'est plus possible et l'on a recours à une résolution numérique à l'aide de logiciels informatiques comme Mathematica et MatLab.

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Remarque

Tous les multiples $\alpha\mathbf{v}_i$ du vecteur $\mathbf{v}_i$, notés $\mathbf{w}_i$, sont également des vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre λ_i car il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ par le même scalaire non nul α et obtenir $\alpha(A\mathbf{v}_i) = \alpha(\lambda_i\mathbf{v}_i)$ ou encore $A(\alpha\mathbf{v}_i) = \lambda_i(\alpha\mathbf{v}_i)$. Après substitution, la dernière relation devient $A\mathbf{w}_i = \lambda_i\mathbf{w}_i$ et montre bien que le nouveau vecteur $\mathbf{w}_i$ est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ_i.

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Propriété 1 : Somme des valeurs propres d'une matrice carrée

La somme des valeurs propres λ_i d'une matrice A_n est égale à sa trace : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A_n)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

$$tr(A) = 1 + 3 = 4 \qquad\qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + 5 = 4$$

Propriété 2 : Produit des valeurs propres d'une matrice carrée

Le produit des valeurs propres λ_i d'une matrice A_n est égale à son déterminant : $\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i = det(A_n)$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

$$det(A) = 1 \times 3 - 4 \times 2 = -5 \qquad \lambda_1 \times \lambda_2 = (-1) \times 5 = -5$$

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Propriété 3 : Cas d'une matrice singulière

Une matrice carrée A_n est singulière si et seulement si elle a au moins une valeur propre λ_i nulle avec $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{A est une matrice singulière}$$

$$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 3$$

Propriété 4 : Cas d'une matrice diagonale

Les valeurs propres λ_i d'une matrice diagonale $D = diag(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$ sont respectivement égales à ses coefficients diagonaux, c'est à dire : $\lambda_1 = d_{11}$,... et $\lambda_n = d_{2n}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2$$

Propriété 5 : Cas d'une matrice triangulaire

Les valeurs propres λ_i d'une matrice triangulaire A_n sont respectivement égales à ses coefficients diagonaux avec $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2$$

Propriété 6 : Cas d'une matrice inverse

Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée inversible A alors $1/\lambda$ est une valeur propre de sa matrice inverse A^{-1}. De plus, si **v** est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ alors **v** est également le vecteur propre de la matrice inverse A^{-1} associé à la valeur propre $1/\lambda$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\lambda_1^{'} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^{'} = \frac{-5+\sqrt{33}}{4} \text{ et } \lambda_2^{'} = \frac{-5+\sqrt{33}}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2\lambda_2^{'} = 1$$

Propriété 8 : Cas du produit d'une matrice par un scalaire

Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée A alors $\alpha\lambda$ (où α est un scalaire) est une valeur propre de la matrice αA. De plus, si **v** est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ alors **v** est également le vecteur propre de la matrice αA associé à la valeur propre $\alpha\lambda$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - (2 \times 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(6-\lambda) - (8 \times 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^{'} = -2 \text{ et } \lambda_2^{'} = 10$$

Propriété 9 : Cas de la puissance d'une matrice

Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée A alors λ^r (où r est un entier naturel) est une valeur propre de la matrice A^r. De plus, si **v** est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ alors **v** est également le vecteur propre de la matrice A^r associé à la valeur propre λ^r.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - (2 \times 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (9-\lambda)(17-\lambda) - (8 \times 16) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^{'} = 1 \text{ et } \lambda_2^{'} = 25$$

Caractéristiques des matrices carrées

Valeurs et vecteurs propres

Propriété 10 : Cas de la différence entre une matrice et une matrice scalaire

Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée A alors $\lambda - c$ (où c est un scalaire) est une valeur propre de la matrice $A - cI$. De plus, si **v** est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ alors **v** est également le vecteur propre de la matrice $A - cI$ associé à la valeur propre $\lambda - c$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - (2 \times 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (-1-\lambda)(1-\lambda) - (2 \times 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^{'} = -3 \text{ et } \lambda_2^{'} = 3$$